

Metodi di omogenizzazione su strutture singolari periodiche

Serena D'Onofrio

ENEA
16 Febbraio 2020

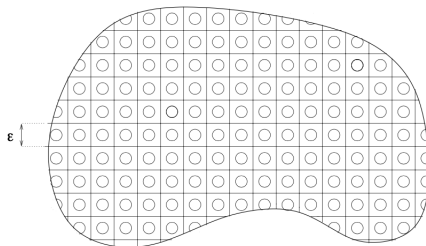
- 1 Introduzione alla teoria dell'omogenizzazione
- 2 Un metodo classico: l'espansione asintotica a due scale
- 3 PDE su strutture singolari periodiche
- 4 Metodo di omogenizzazione per ottenere convergenza in norma
- 5 Sintesi dei risultati

- 1 Introduzione alla teoria dell'omogenizzazione
- 2 Un metodo classico: l'espansione asintotica a due scale
- 3 PDE su strutture singolari periodiche
- 4 Metodo di omogenizzazione per ottenere convergenza in norma
- 5 Sintesi dei risultati

Teoria dell'omogenizzazione

- La teoria dell'omogenizzazione nasce per capire il comportamento di un materiale in base alle sue proprietà di periodicità o eterogeneità, ovvero **comprendere come reagisce macroscopicamente un materiale partendo dalle sue caratteristiche microscopiche**. In un materiale periodico spesso la lunghezza del periodo l è molto piccola rispetto alla lunghezza L del campione di materiale che abbiamo a disposizione.
- Dal punto di vista matematico per ottenere informazioni sul passaggio da microscopico a macroscopico, **definiamo ε come il rapporto tra le due scale di lunghezza $\frac{l}{L}$ e studiamo il limite asintotico $\varepsilon \rightarrow 0$** : questo processo è chiamato omogenizzazione.
- Le equazioni che governano la fisica dei materiali eterogenei sono **PDE con coefficienti rapidamente oscillanti**; quando ε è piccolo risolvere numericamente tali equazioni è impossibile perché dal punto di vista computazionale la complessità è molto elevata.
- Possiamo trattare queste equazioni come equazioni più semplici a coefficienti costanti?

Teoria dell'omogenizzazione



Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio periodico, indichiamo con $Q = [0, 1)^d$ la cella periodica riscalata. Consideriamo un problema di diffusione in un materiale periodico in cui $A(x/\varepsilon)$ è una matrice ε -periodica

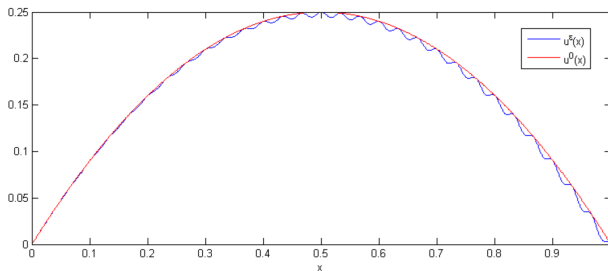
$$\begin{aligned} -\operatorname{div} A(x/\varepsilon) \nabla u^\varepsilon(x) + u^\varepsilon(x) &= f(x) & x \in \Omega \\ u^\varepsilon(x) &= 0 & x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

Teoria dell'omogenizzazione

Quello che vogliamo dimostrare attraverso il processo di omogenizzazione è che quando $\varepsilon \rightarrow 0$, la soluzione $u^\varepsilon(x)$ è **approssimata, o converge in qualche modo**, alla soluzione della seguente equazione effettiva o omogenizzata

$$-\operatorname{div} A^{\text{hom}} \nabla u^0(x) + u^0(x) = f(x), \quad (2)$$

dove A^{hom} è una matrice costante, indipendente da f e dalle condizioni al bordo, che descrive le caratteristiche del materiale omogenizzato.



Overview

- 1 Introduzione alla teoria dell'omogenizzazione
- 2 Un metodo classico: l'espansione asintotica a due scale
- 3 PDE su strutture singolari periodiche
- 4 Metodo di omogenizzazione per ottenere convergenza in norma
- 5 Sintesi dei risultati

Espansione asintotica a due scale

Tecnica classica utile per costruire formalmente l'equazione omogenizzata. **La soluzione u^ε dell'equazione (1) viene scritta come una serie in potenze di ε**

$$u^\varepsilon(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u^n\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$x \in \Omega$ variabile lenta, $\frac{x}{\varepsilon} = y \in Q$ variabile veloce, $u^n(x, y)$ è periodica nella seconda variabile.

Sostituiamo questa espansione nell'equazione originale, usando la regola di derivazione $\nabla u(x, y) = \nabla_x u(x, y) + \varepsilon^{-1} \nabla_y u(x, y)$.

Il problema iniziale si trasforma in una sequenza di equazioni per ogni termine $u^n(x, y)$.

Analizziamo il primo termine, ovvero **l'equazione di ordine ε^{-2}** :

$$-\operatorname{div}_y A(y) \nabla_y u^0(x, y) = 0$$

questo implica che $u^0(x, y) = u^0(x)$, è una funzione costante in y .

Espansione asintotica a due scale

Il secondo termine è **l'equazione di ordine** ε^{-1} :

$$-\operatorname{div}_y A(y) \nabla_y u^1(x, y) = \operatorname{div}_y A(y) \nabla_x u^0(x),$$

la cui soluzione u^1 ha la seguente forma

$$u^1(x, y) = \sum_{k=1}^d N_k(y) \partial_{x_k} u^0(x),$$

e le componenti del vettore $N(y) = (N_1(y), \dots, N_d(y))$ sono le soluzioni periodiche del seguente **problema sulla cella unitaria** Q

$$-\operatorname{div}_y A(y) \nabla_y N_k(y) = \sum_{j=1}^d \partial_{y_i} A_{jk}(y).$$

Espansione asintotica a due scale

Analizziamo l'equazione di ordine ε^0 per $u^2(x, y)$:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_y A(y) \nabla_y u^2(x, y) = \\ \operatorname{div}_y A(y) \nabla_x u^1(x, y) + \operatorname{div}_x A(y) \nabla_y u^1(x, y) + \operatorname{div}_x A(y) \nabla_x u^0(x) + f(x). \end{aligned}$$

Attraverso lo studio delle condizioni di solvibilità, ed utilizzando il modo in cui abbiamo scritto $u^1(x, y)$, **costruiamo l'equazione omogenizzata**

$$-\operatorname{div}_x \int_Q A(y) (\nabla_y N + I) dy \nabla_x u^0(x) + u^0(x) = f(x).$$

La matrice costante $\int_Q A(y) (\nabla_y N + I) dy$ è proprio la matrice omogenizzata A^{hom} . Questo metodo permette di costruire formalmente l'equazione, ma non fornisce una convergenza matematica rigorosa di $u^\varepsilon \rightarrow u^0$.

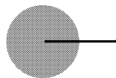
- 1 Introduzione alla teoria dell'omogenizzazione
- 2 Un metodo classico: l'espansione asintotica a due scale
- 3 PDE su strutture singolari periodiche**
- 4 Metodo di omogenizzazione per ottenere convergenza in norma
- 5 Sintesi dei risultati

Strutture singolari periodiche

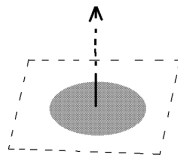
L'oggetto singolare più semplice è un segmento in un piano. Altri esempi possono essere la composizione di più oggetti singolari, come un insieme di segmenti (a), un disco con un segmento (b), un disco in $\mathbb{R}^3$ (c).



a



b

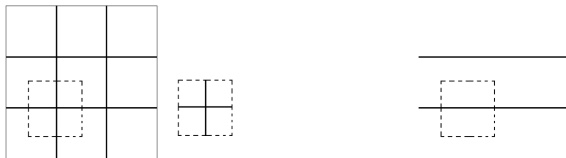


c

Dal punto di vista matematico **su questa tipologia di oggetti si definisce una misura μ** che, ad esempio, per l'immagine (b) è la somma della misura piana di Lebesgue sul disco e la misura lineare di Lebesgue sul segmento, oppure per l'immagine (c) è una misura tridimensionale che coincide con la misura piana di Lebesgue sul disco.

Strutture singolari periodiche

Utile nelle applicazioni: **i metamateriali, dei materiali artificiali che si presentano sotto forma di strutture singolari periodiche.** Gli esempi più semplici di questo tipo di struttura sono un net quadrato o un sistema di segmenti paralleli che si ripetono periodicamente.



Definizione

Sia $Q := (0, 1]^n$ una cella di periodicità, le strutture singolari periodiche sono degli insiemi Q -periodici con dimensione inferiore rispetto a quella dello spazio ambiente $\mathbb{R}^n$. Ogni struttura singolare porta con sé una misura naturale μ che è supportata sulla struttura dell'oggetto stesso, è Q -periodica e $\mu(Q) = 1$.

Per formulare il problema di omogenizzazione su strutture singolari periodiche, per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo la misura ε -periodica μ^ε come segue

$$\mu^\varepsilon(B) = \varepsilon^d \mu(\varepsilon^{-1}B)$$

per ogni insieme di Borel $B \subset \mathbb{R}^d$. Lavoriamo in spazi che sono influenzati dalla misura, quindi le nostre funzioni saranno in $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu^\varepsilon)$ o nei relativi spazi di Sobolev.

Il primo problema oggetto della nostra analisi sono le **PDE di tipo ellittico**

$$-\operatorname{div} A(\cdot/\varepsilon) \nabla u^\varepsilon + u^\varepsilon = f \in L^2(\mathbb{R}^d, d\mu^\varepsilon) \quad (3)$$

Questa equazione di diffusione differisce dal problema iniziale in quanto μ^ε ne influenza il significato, infatti il problema (3) è interpretato in maniera variazionale

$$\int_{\mathbb{R}^d} A \nabla u^\varepsilon \cdot \overline{\nabla \phi} d\mu^\varepsilon + \int_{\mathbb{R}^d} u^\varepsilon \overline{\phi} d\mu^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d} f \overline{\phi} d\mu^\varepsilon \quad \forall (\phi, \nabla \phi) \in H^1(\mathbb{R}^d, d\mu^\varepsilon).$$

Equazioni di Maxwell

Il secondo problema che vogliamo studiare è **il sistema delle equazioni di Maxwell**. Qui abbiamo la sua formulazione armonica nel tempo con densità di carica nulla, che è stata resa priva di dimensione con un processo di scaling

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \tilde{A}(\cdot/\varepsilon) B^\varepsilon - D^\varepsilon = g \\ \operatorname{rot} A(\cdot/\varepsilon) D^\varepsilon + B^\varepsilon = f \end{cases} \quad (4)$$

$\tilde{A}^{-1}$ permeabilità magnetica relativa, A^{-1} permittività elettrica relativa.

B^ε induzione magnetica, $H^\varepsilon = \tilde{A}^{-1} B$ campo magnetico.

D^ε induzione elettrica, $E^\varepsilon = A^{-1} D$ campo elettrico.

g è una funzione che rappresenta la corrente esterna del sistema, f è una funzione ausiliaria che non appare nel sistema di Maxwell standard.

Goal: dimostrare una convergenza in norma tra le soluzioni dei problemi (3), (4) e le relative equazioni omogenizzate.

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^d, d\mu^\varepsilon)} \leq \varepsilon C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d, d\mu^\varepsilon)}$$

Overview

- 1 Introduzione alla teoria dell'omogenizzazione
- 2 Un metodo classico: l'espansione asintotica a due scale
- 3 PDE su strutture singolari periodiche
- 4 Metodo di omogenizzazione per ottenere convergenza in norma**
- 5 Sintesi dei risultati

Metodo di omogenizzazione

Step 1 Trasformiamo gli operatori del problema ellittico e del sistema di Maxwell attraverso la **trasformata di Floquet**.

$$\mathcal{F}_\varepsilon : L^2(\mathbb{R}^d, d\mu^\varepsilon) \longrightarrow L^2(\varepsilon^{-1}Q' \times Q, d\theta \times d\mu),$$

Trasformata di Floquet

Sia $Q' := (-\pi, \pi]^d$ la cella duale, e il parametro $\theta \in \varepsilon^{-1}Q'$. Dati $\varepsilon > 0$ e una funzione $u \in L^2(\mathbb{R}^d, d\mu^\varepsilon)$, la funzione $\mathcal{F}_\varepsilon u$ è definita come

$$(\mathcal{F}_\varepsilon u)(z, \theta) = \left(\frac{\varepsilon^2}{2\pi} \right)^{d/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} u(\varepsilon y + \varepsilon n) \exp(-i\varepsilon n \cdot \theta), \quad z \in \varepsilon Q, \theta \in \varepsilon^{-1}Q'.$$

Dopo aver applicato la trasformata di Floquet otteniamo le seguenti **famiglie di operatori parametrizzate** da θ ($e_{\varepsilon\theta} = \exp(i\varepsilon\theta \cdot y)$)

$$-\varepsilon^{-2} \overline{e_{\varepsilon\theta}} \operatorname{div} A \nabla e_{\varepsilon\theta}, \quad \varepsilon^{-2} \overline{e_{\varepsilon\theta}} \operatorname{rot} A \operatorname{rot} e_{\varepsilon\theta}, \quad \varepsilon^{-2} A^{1/2} \overline{e_{\varepsilon\theta}} \operatorname{rot} \operatorname{rot} e_{\varepsilon\theta} A^{1/2}$$

Metodo di omogenizzazione

Step 2 Consideriamo l'equazione trasformata

$$-\varepsilon^{-2} \overline{e_{\varepsilon\theta}} \operatorname{div} A \nabla e_{\varepsilon\theta} u_{\theta}^{\varepsilon} + u_{\theta}^{\varepsilon} = F \in L^2(Q, d\mu)$$

ed **approssimiamo la soluzione** nel seguente modo

$$u_{\theta}^{\varepsilon} = c_{\theta} + i\varepsilon N_j \theta_j c_{\theta} + \varepsilon^2 R_{\theta}^{\varepsilon}$$

dove N_j è la soluzione del problema sulla cella unitaria e c_{θ} risolve l'equazione omogenizzata trasformata

$$\theta \cdot A^{\text{hom}} \theta c_{\theta} + c_{\theta} = \int_Q F d\mu$$

Step 3 Dimostriamo un risultato di **convergenza in norma**, uniforme in θ in $L^2(Q, d\mu)$

$$\|u_{\theta}^{\varepsilon} - c_{\theta}\|_{L^2(Q, d\mu)} \leq \varepsilon C \|F\|_{L^2(Q, d\mu)}$$

Step 4 Applichiamo la trasformata inversa e otteniamo la stima uniforme per la soluzione del problema iniziale

Overview

- 1 Introduzione alla teoria dell'omogenizzazione
- 2 Un metodo classico: l'espansione asintotica a due scale
- 3 PDE su strutture singolari periodiche
- 4 Metodo di omogenizzazione per ottenere convergenza in norma
- 5 Sintesi dei risultati**

Risultati per PDE ellittiche

Per le equazioni ellittiche otteniamo il seguente **risultato di convergenza in norma su strutture singolari periodiche**

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^d, d\mu^\varepsilon)} \leq \varepsilon C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d, d\mu^\varepsilon)}$$

C è una costante positiva indipendente da ε e f
 u^0 è la soluzione dell'equazione omogenizzata che ci aspettiamo

$$-\operatorname{div} \int_Q A(\nabla N + I) d\mu \nabla u^0 + u^0 = f$$

Questo risultato per le equazioni ellittiche ci fa ben sperare che un comportamento simile si possa ottenere anche per il sistema di equazioni di Maxwell, dove però abbiamo una situazione abbastanza differente dal punto di vista matematico perché ci troviamo di fronte a equazioni vettoriali e non scalari.

Risultati per il sistema delle equazioni di Maxwell

Dividiamo il sistema in tre casi differenti che studiamo separatamente.

Caso I: permeabilità magnetica unitaria ed assenza di correnti esterne

$$\begin{cases} \operatorname{rot} B^\varepsilon = D^\varepsilon \\ \operatorname{rot} A D^\varepsilon + B^\varepsilon = f \end{cases} \quad (5)$$

Il sistema equivale alla seguente equazione differenziale vettoriale

$$\operatorname{rot} A \operatorname{rot} B^\varepsilon + B^\varepsilon = f \in [L^2(\mathbb{R}^3, d\mu^\varepsilon)]^3$$

In questo caso, adattando il procedimento sviluppato per le PDE ellittiche al problema vettoriale, otteniamo i seguenti **risultati di convergenza**

$$\|B^\varepsilon - B^{\operatorname{hom}}\|_{L^2(\mathbb{R}^3, d\mu^\varepsilon)} \leq \varepsilon C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3, d\mu^\varepsilon)}$$

$$\|D^\varepsilon - (\operatorname{rot} N + I) D^{\operatorname{hom}}\|_{L^2(\mathbb{R}^3, d\mu^\varepsilon)} \leq \varepsilon C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3, d\mu^\varepsilon)}$$

B^{hom} e D^{hom} sono le soluzioni dell'equazione omogenizzata associata a (5).

Risultati per il sistema delle equazioni di Maxwell

Caso II: permeabilità magnetica unitaria e presenza di correnti esterne

$$\begin{cases} \operatorname{rot} B^\varepsilon - D^\varepsilon = g \\ \operatorname{rot} A D^\varepsilon = -B^\varepsilon \end{cases} \quad (6)$$

In questo caso riscriviamo il sistema nel seguente modo

$$A^{1/2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} A^{1/2} D^\varepsilon + D^\varepsilon = -A^{1/2} g \in [L^2(\mathbb{R}^3, d\mu^\varepsilon)]^3$$

In questo caso **il risultato di convergenza è diverso**: la soluzione $(B^\varepsilon, D^\varepsilon)$ non converge alla soluzione dell'equazione omogenizzata associata a (6):

$$\begin{aligned} \|B^\varepsilon - [B^{\text{hom}} + \mathfrak{B}^\varepsilon]\|_{L^2(\mathbb{R}^3, d\mu^\varepsilon)} &\leq \varepsilon C \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3, d\mu^\varepsilon)} \\ \|D^\varepsilon - [(\operatorname{rot} N + I)D^{\text{hom}} + \mathfrak{D}^\varepsilon]\|_{L^2(\mathbb{R}^3, d\mu^\varepsilon)} &\leq \varepsilon C \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3, d\mu^\varepsilon)} \end{aligned}$$

compaiono due correttori, $\mathfrak{B}^\varepsilon$ e $\mathfrak{D}^\varepsilon$, che sono delle perturbazioni singolari del problema omogenizzato

Risultati per il sistema delle equazioni di Maxwell

Caso III: il caso generale (studiamo il setting $f = 0$, quello $g = 0$ è analogo)

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \tilde{A} B^\varepsilon - D^\varepsilon = g \\ \operatorname{rot} A D^\varepsilon = -B^\varepsilon \end{cases} \quad (7)$$

Riscriviamo il sistema in una formulazione equivalente

$$A^{1/2} \operatorname{rot} \tilde{A} \operatorname{rot} A^{1/2} D^\varepsilon + D^\varepsilon = -A^{1/2} g \in [L^2(\mathbb{R}^3, d\mu^\varepsilon)]^3$$

Il risultato di convergenza è molto simile a quello del Caso II: anche qui abbiamo dei correttori che sono soluzioni di problemi di perturbazione singolare

$$\begin{aligned} \|B^\varepsilon - [(\operatorname{rot} N + I)B^{\text{hom}} + \mathfrak{B}^\varepsilon]\|_{L^2(\mathbb{R}^3, d\mu^\varepsilon)} &\leq \varepsilon C \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3, d\mu^\varepsilon)} \\ \|D^\varepsilon - [(\operatorname{rot} N + I)D^{\text{hom}} + \mathfrak{D}^\varepsilon]\|_{L^2(\mathbb{R}^3, d\mu^\varepsilon)} &\leq \varepsilon C \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3, d\mu^\varepsilon)} \end{aligned}$$

Grazie per l'attenzione!