

Aspetti topologici delle fasi multi-linguaggio del Naming Game su reti community-based

Filippo Palombi



in collaborazione con

Simona Toti (ISTAT)

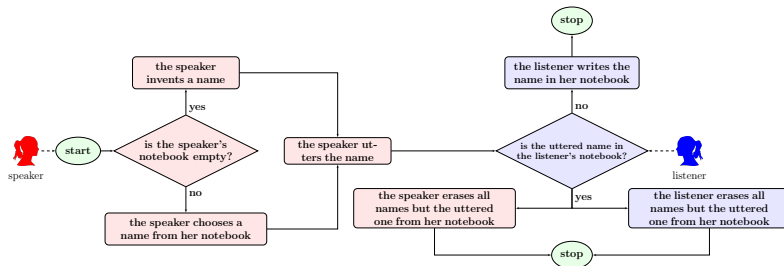
(arXiv:1610.08672)

16 Dicembre 2016 – C.R. Frascati

Naming Game

Un modello adattivo

- Due agenti interagiscono per assegnare un nome ad un oggetto (inizialmente privo)
- Ciascun agente possiede un *notebook* di possibili nomi (eventualmente vuoto)
- Uno dei due agenti agisce come **speaker**
- L'altro agente agisce come **listener**
- L'interazione è descritta dal seguente diagramma di flusso:



Articolo originale

“Sharp transition towards shared vocabularies in multi-agent systems.”

A. Baronchelli, M. Felici, E. Caglioti, V. Loreto, and L. Steels.

J. Stat. Mech. Theory Exp., P06014, 2006.

Motivazioni per lo studio del Naming Game

- Studio dei meccanismi evolutivi delle lingue
- Sincronizzazione di protocolli di comunicazione tra dispositivi elettronici
- Analisi di dinamiche d'opinione su reti complesse

Distribuzione di equilibrio del modello

Per molte reti di agenti $\mathcal{G}$ con $|\mathcal{G}| = N$, il sistema converge al consenso in un certo tempo T_N :

$$\mathcal{P}_{\text{final}}(n) = \prod_{i \in \mathcal{G}} \delta_{n_i, \{A\}} \quad (\text{distr. di prob. finale del sistema - consensus su } A)$$

dove n_i è il notebook dell' i -mo agente ed n è il vettore di tutti i notebooks. Esempi:

- Reticolo 1-dimensionale: $T_N \sim N^3$
- Reticolo 2-dimensionale: $T_N \sim N^2$
- Grafo di Erdős-Rényi: $T_N \sim N^{1.4}$
- Grafo di Barabasi-Albert: $T_N \sim N^{1.5}$

Reti community-based

Nel caso in cui $\mathcal{G}$ è una rete community-based, il raggiungimento del consenso richiede la formazione di stati metastabili dove all'interno di ciascuna comunità prevale una lingua locale

Si può utilizzare questa caratteristica per "scoprire" le comunità di una data rete. In altri termini, il Naming Game può essere utilizzato come **algoritmo di community detection**!

Esistenza di stati metastabili

"Nonequilibrium dynamics of language games on complex networks"

L. Dall'Asta, A. Baronchelli, A. Barrat, and V. Loreto.

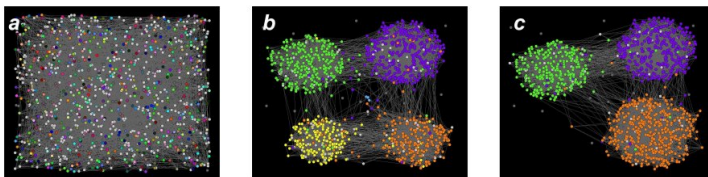
Phys. Rev. E, 74:036105, 2006.

Uso degli stati meta-stabili x rilevare comunità su reti empiriche

"The Naming Game in social networks: community formation and consensus engineering."

Q. Lu, G. Korniss, and B. K. Szymanski.

J. Econ. Interact. Coord., 4(2):221–235, 2009.



Che cosa è una rete community-based?

Consideriamo un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$.

$\mathcal{V}$ è l'insieme dei nodi

$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}\}$ è l'insieme degli archi

Prendiamo una partizione $\mathcal{V}_{\mathcal{E}}$ di $\mathcal{V}$. Cioè

$$\mathcal{V}_{\mathcal{E}} = \bigcup_{k=1}^Q \mathcal{C}^{(k)}, \quad \mathcal{C}^{(i)} \cap \mathcal{C}^{(j)} = \emptyset \text{ se } i \neq j$$

Questo partizionamento di $\mathcal{V}$ induce a sua volta un partizionamento $\mathcal{E}_{\mathcal{E}} = \bigcup_{i,k=1}^Q \mathcal{E}^{(ik)}$, dove

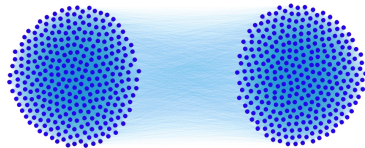
$$\mathcal{E}^{(ik)} = \{(x, y) \in \mathcal{E} \mid x \in \mathcal{C}^{(i)} \text{ e } y \in \mathcal{C}^{(k)}\}$$

Il grafo $\mathcal{G}$ si dice community-based se esiste un partizionamento tale che

$$|\mathcal{E}^{(ik)}| \ll \min\{|\mathcal{E}^{(ii)}|, |\mathcal{E}^{(kk)}|\}$$

Questa definizione NON è stringente!!!

Il modello a partizioni piantumate



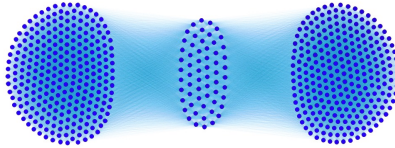
- E' il più semplice modello di rete community-based
- Comunità di eguale dimensione
- Due soli parametri

p_{in} = probabilità di connessione nodo-nodo all'interno di una comunità

p_{out} = probabilità di connessione nodo-nodo tra comunità

$v = \frac{p_{out}}{p_{in}} \ll 1$ misura quanto più dense sono le connessioni interne rispetto a quelle esterne

Comunità con overlap



- Alcuni agenti possono appartenere a più comunità (overlap)
- Comunità di eguale dimensione

$$\mathcal{C}^{(1)} = \mathcal{C}_{\text{in}}^{(1)} \cup \mathcal{C}_{\text{ov}}^{(1)}, \quad \mathcal{C}^{(2)} = \mathcal{C}_{\text{in}}^{(2)} \cup \mathcal{C}_{\text{ov}}^{(2)}$$

- $|\mathcal{C}_{\text{in}}^{(1)}| = |\mathcal{C}_{\text{in}}^{(2)}| = N_{\text{in}}$
- $|\mathcal{C}_{\text{ov}}^{(1)}| = |\mathcal{C}_{\text{ov}}^{(2)}| = N_{\text{ov}}/2$
- $N = 2N_{\text{in}} + N_{\text{ov}}$
- $\omega \equiv \frac{N_{\text{ov}}}{N_{\text{in}}}$

$\gamma = \frac{N_{\text{ov}}}{N} = \frac{\omega}{2 + \omega} \ll 1$ misura il peso complessivo dell'overlap sulla rete

Comunità con topologia scale-free



- Le comunità sono costruite in modo tale che la distribuzione del grado interno sia power-law
- la rete di interconnessione tra le comunità è costruita indipendentemente

Versione binaria (Modello AB)

- Supponiamo che inizialmente i notebook non siano vuoti: due parole possibili, A o B
- Successivamente ciascun notebook può trovarsi in $\{A\}$, $\{B\}$ o $\{A, B\}$
- Elenchiamo tutte le possibili interazioni:

prima dell'interazione	dopo l'interazione
$S \rightarrow L$	$S - L$
$\{A\} \xrightarrow{A} \{A\}$	$\{A\} - \{A\}$
$\{A\} \xrightarrow{A} \{B\}$	$\{A\} - \{AB\}$
$\{A\} \xrightarrow{A} \{AB\}$	$\{A\} - \{A\}$
$\{B\} \xrightarrow{B} \{A\}$	$\{B\} - \{AB\}$
$\{B\} \xrightarrow{B} \{B\}$	$\{B\} - \{B\}$
$\{B\} \xrightarrow{B} \{AB\}$	$\{B\} - \{B\}$
$\{AB\} \xrightarrow{A} \{A\}$	$\{A\} - \{A\}$
$\{AB\} \xrightarrow{A} \{B\}$	$\{AB\} - \{AB\}$
$\{AB\} \xrightarrow{A} \{AB\}$	$\{A\} - \{A\}$
$\{AB\} \xrightarrow{B} \{A\}$	$\{AB\} - \{AB\}$
$\{AB\} \xrightarrow{B} \{B\}$	$\{B\} - \{B\}$
$\{AB\} \xrightarrow{B} \{AB\}$	$\{B\} - \{B\}$

campo medio

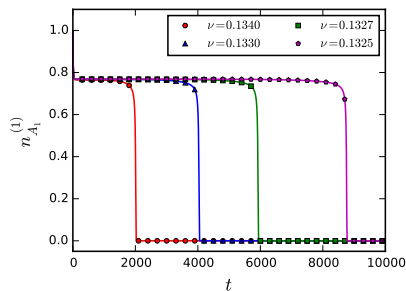
Sia $n_X^{(i)}(t)$ la densità degli agenti nella i -ma comunità con notebook X al tempo t :

$$n_A^{(i)}(t) + n_B^{(i)}(t) + n_{AB}^{(i)}(t) = 1$$

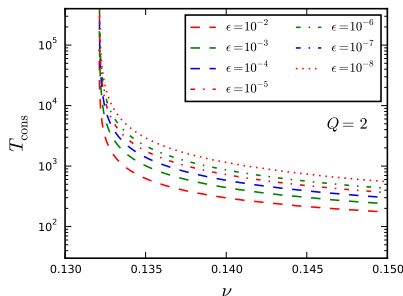
Assumiamo come stato iniziale

$$n_A^{(1)} = 1 - \epsilon \quad n_B^{(1)} = \epsilon \quad n_{AB}^{(1)} = 0$$

$$n_A^{(2)} = 0 \quad n_B^{(2)} = 1 \quad n_{AB}^{(2)} = 0$$



Sul Planted Partition Model...



$$v_c = -\frac{\sqrt{57}}{6} \sin \left[\frac{1}{3} \arctan \left(2 \frac{\sqrt{2694}}{99} \right) + \frac{\pi}{6} \right] + \frac{\sqrt{19}}{2} \sin \left[-\frac{1}{3} \arctan \left(2 \frac{\sqrt{2694}}{99} \right) + \frac{\pi}{3} \right] - \frac{1}{2}$$

$$= 0.132122756\dots$$

... il punto critico v_c si può calcolare esattamente!

Le equazioni che descrivono il modello sul planted partition model sono

$$\frac{dn_A^{(1)}}{dt} = \frac{1}{1+v} \left\{ n_A^{(1)} n_{AB}^{(1)} + (n_{AB}^{(1)})^2 - n_A^{(1)} n_B^{(1)} \right\} + \frac{v}{1+v} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(1)} n_A^{(2)} - \frac{1}{2} n_A^{(1)} n_{AB}^{(2)} + n_{AB}^{(1)} n_{AB}^{(2)} - n_A^{(1)} n_B^{(2)} \right\},$$

$$\frac{dn_B^{(1)}}{dt} = \frac{1}{1+v} \left\{ n_B^{(1)} n_{AB}^{(1)} + (n_{AB}^{(1)})^2 - n_A^{(1)} n_B^{(1)} \right\} + \frac{v}{1+v} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(1)} n_B^{(2)} - \frac{1}{2} n_B^{(1)} n_{AB}^{(2)} + n_{AB}^{(1)} n_{AB}^{(2)} - n_B^{(1)} n_A^{(2)} \right\},$$

$$\frac{dn_A^{(2)}}{dt} = \frac{1}{1+v} \left\{ n_A^{(2)} n_{AB}^{(2)} + (n_{AB}^{(2)})^2 - n_A^{(2)} n_B^{(2)} \right\} + \frac{v}{1+v} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(2)} n_A^{(1)} - \frac{1}{2} n_A^{(2)} n_{AB}^{(1)} + n_{AB}^{(2)} n_{AB}^{(1)} - n_A^{(2)} n_B^{(1)} \right\},$$

$$\frac{dn_B^{(2)}}{dt} = \frac{1}{1+v} \left\{ n_B^{(2)} n_{AB}^{(2)} + (n_{AB}^{(2)})^2 - n_A^{(2)} n_B^{(2)} \right\} + \frac{v}{1+v} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(2)} n_B^{(1)} - \frac{1}{2} n_B^{(2)} n_{AB}^{(1)} + n_{AB}^{(2)} n_{AB}^{(1)} - n_B^{(2)} n_A^{(1)} \right\}.$$

All'equilibrio:

$$0 = \frac{1}{1+\nu} \left\{ n_A^{(1)} n_{AB}^{(1)} + (n_{AB}^{(1)})^2 - n_A^{(1)} n_B^{(1)} \right\} + \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(1)} n_A^{(2)} - \frac{1}{2} n_A^{(1)} n_{AB}^{(2)} + n_{AB}^{(1)} n_{AB}^{(2)} - n_A^{(1)} n_B^{(2)} \right\},$$

$$0 = \frac{1}{1+\nu} \left\{ n_B^{(1)} n_{AB}^{(1)} + (n_{AB}^{(1)})^2 - n_A^{(1)} n_B^{(1)} \right\} + \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(1)} n_B^{(2)} - \frac{1}{2} n_B^{(1)} n_{AB}^{(2)} + n_{AB}^{(1)} n_{AB}^{(2)} - n_B^{(1)} n_A^{(2)} \right\},$$

$$0 = \frac{1}{1+\nu} \left\{ n_A^{(2)} n_{AB}^{(2)} + (n_{AB}^{(2)})^2 - n_A^{(2)} n_B^{(2)} \right\} + \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(2)} n_A^{(1)} - \frac{1}{2} n_A^{(2)} n_{AB}^{(1)} + n_{AB}^{(2)} n_{AB}^{(1)} - n_A^{(2)} n_B^{(1)} \right\},$$

$$0 = \frac{1}{1+\nu} \left\{ n_B^{(2)} n_{AB}^{(2)} + (n_{AB}^{(2)})^2 - n_A^{(2)} n_B^{(2)} \right\} + \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(2)} n_B^{(1)} - \frac{1}{2} n_B^{(2)} n_{AB}^{(1)} + n_{AB}^{(2)} n_{AB}^{(1)} - n_B^{(2)} n_A^{(1)} \right\}.$$

All'equilibrio:

$$0 = \frac{1}{1+\nu} \left\{ n_A^{(1)} n_{AB}^{(1)} + (n_{AB}^{(1)})^2 - n_A^{(1)} n_B^{(1)} \right\} + \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(1)} n_A^{(2)} - \frac{1}{2} n_A^{(1)} n_{AB}^{(2)} + n_{AB}^{(1)} n_{AB}^{(2)} - n_A^{(1)} n_B^{(2)} \right\},$$

$$0 = \frac{1}{1+\nu} \left\{ n_B^{(1)} n_{AB}^{(1)} + (n_{AB}^{(1)})^2 - n_A^{(1)} n_B^{(1)} \right\} + \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(1)} n_B^{(2)} - \frac{1}{2} n_B^{(1)} n_{AB}^{(2)} + n_{AB}^{(1)} n_{AB}^{(2)} - n_B^{(1)} n_A^{(2)} \right\},$$

$$0 = \frac{1}{1+\nu} \left\{ n_A^{(2)} n_{AB}^{(2)} + (n_{AB}^{(2)})^2 - n_A^{(2)} n_B^{(2)} \right\} + \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(2)} n_A^{(1)} - \frac{1}{2} n_A^{(2)} n_{AB}^{(1)} + n_{AB}^{(2)} n_{AB}^{(1)} - n_A^{(2)} n_B^{(1)} \right\},$$

$$0 = \frac{1}{1+\nu} \left\{ n_B^{(2)} n_{AB}^{(2)} + (n_{AB}^{(2)})^2 - n_A^{(2)} n_B^{(2)} \right\} + \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(2)} n_B^{(1)} - \frac{1}{2} n_B^{(2)} n_{AB}^{(1)} + n_{AB}^{(2)} n_{AB}^{(1)} - n_B^{(2)} n_A^{(1)} \right\}.$$

Questo è un sistema di eq.ni algebriche di secondo grado, risolvibile. La soluzione $\tilde{n}$ può essere stabile oppure instabile

All'equilibrio:

$$0 = \frac{1}{1+\nu} \left\{ n_A^{(1)} n_{AB}^{(1)} + (n_{AB}^{(1)})^2 - n_A^{(1)} n_B^{(1)} \right\} + \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(1)} n_A^{(2)} - \frac{1}{2} n_A^{(1)} n_{AB}^{(2)} + n_{AB}^{(1)} n_{AB}^{(2)} - n_A^{(1)} n_B^{(2)} \right\},$$

$$0 = \frac{1}{1+\nu} \left\{ n_B^{(1)} n_{AB}^{(1)} + (n_{AB}^{(1)})^2 - n_A^{(1)} n_B^{(1)} \right\} + \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(1)} n_B^{(2)} - \frac{1}{2} n_B^{(1)} n_{AB}^{(2)} + n_{AB}^{(1)} n_{AB}^{(2)} - n_B^{(1)} n_A^{(2)} \right\},$$

$$0 = \frac{1}{1+\nu} \left\{ n_A^{(2)} n_{AB}^{(2)} + (n_{AB}^{(2)})^2 - n_A^{(2)} n_B^{(2)} \right\} + \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(2)} n_A^{(1)} - \frac{1}{2} n_A^{(2)} n_{AB}^{(1)} + n_{AB}^{(2)} n_{AB}^{(1)} - n_A^{(2)} n_B^{(1)} \right\},$$

$$0 = \frac{1}{1+\nu} \left\{ n_B^{(2)} n_{AB}^{(2)} + (n_{AB}^{(2)})^2 - n_A^{(2)} n_B^{(2)} \right\} + \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(2)} n_B^{(1)} - \frac{1}{2} n_B^{(2)} n_{AB}^{(1)} + n_{AB}^{(2)} n_{AB}^{(1)} - n_B^{(2)} n_A^{(1)} \right\}.$$

Questo è un sistema di eq.ni algebriche di secondo grado, risolvibile. La soluzione $\tilde{n}$ può essere stabile oppure instabile

Nota la soluzione $\tilde{n}$, per studiarne la stabilità poniamo $n_X^{(i)} = \tilde{n}_X^{(i)} + \epsilon_X^{(i)}$. Quindi espandiamo le equazioni del modello in serie di Taylor all'ordine più basso in ϵ .

All'equilibrio:

$$0 = \frac{1}{1+\nu} \left\{ n_A^{(1)} n_{AB}^{(1)} + (n_{AB}^{(1)})^2 - n_A^{(1)} n_B^{(1)} \right\} + \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(1)} n_A^{(2)} - \frac{1}{2} n_A^{(1)} n_{AB}^{(2)} + n_{AB}^{(1)} n_{AB}^{(2)} - n_A^{(1)} n_B^{(2)} \right\},$$

$$0 = \frac{1}{1+\nu} \left\{ n_B^{(1)} n_{AB}^{(1)} + (n_{AB}^{(1)})^2 - n_A^{(1)} n_B^{(1)} \right\} + \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(1)} n_B^{(2)} - \frac{1}{2} n_B^{(1)} n_{AB}^{(2)} + n_{AB}^{(1)} n_{AB}^{(2)} - n_B^{(1)} n_A^{(2)} \right\},$$

$$0 = \frac{1}{1+\nu} \left\{ n_A^{(2)} n_{AB}^{(2)} + (n_{AB}^{(2)})^2 - n_A^{(2)} n_B^{(2)} \right\} + \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(2)} n_A^{(1)} - \frac{1}{2} n_A^{(2)} n_{AB}^{(1)} + n_{AB}^{(2)} n_{AB}^{(1)} - n_A^{(2)} n_B^{(1)} \right\},$$

$$0 = \frac{1}{1+\nu} \left\{ n_B^{(2)} n_{AB}^{(2)} + (n_{AB}^{(2)})^2 - n_A^{(2)} n_B^{(2)} \right\} + \frac{\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{3}{2} n_{AB}^{(2)} n_B^{(1)} - \frac{1}{2} n_B^{(2)} n_{AB}^{(1)} + n_{AB}^{(2)} n_{AB}^{(1)} - n_B^{(2)} n_A^{(1)} \right\}.$$

Questo è un sistema di eq.ni algebriche di secondo grado, risolvibile. La soluzione $\tilde{n}$ può essere stabile oppure instabile

Nota la soluzione $\tilde{n}$, per studiarne la stabilità poniamo $n_X^{(i)} = \tilde{n}_X^{(i)} + \epsilon_X^{(i)}$. Quindi espandiamo le equazioni del modello in serie di Taylor all'ordine più basso in ϵ .

La soluzione $\tilde{n}$ trovata è stabile laddove $\epsilon \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$, mentre è instabile laddove $\epsilon \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow +\infty$

DOMANDA

Il punto di transizione dipende dalla
topologia della rete?

“Topological aspects of the multi-language phases of the Naming Game on community-based networks”

F. Palombi, S. Toti

Games, Special issue on Evolutionary Games and Statistical Physics of Social Networks, in press

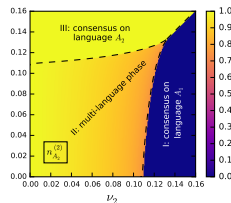
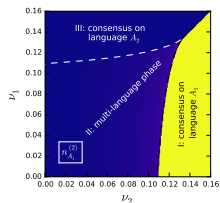
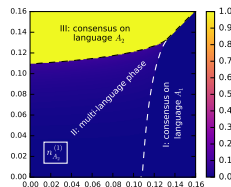
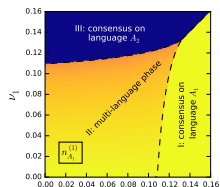
Nel nostro lavoro studiamo come il punto di transizione dipende da:

- la densità relativa dei links interni alle comunità
- il numero delle comunità
- l'overlap tra le comunità
- la dimensione relativa tra le comunità
- la topologia interna delle comunità
- la topologia della rete di interconnessione tra le comunità

Risultato

Le soglie di transizione alle fasi multi-linguaggio, nonostante siano derivate come soluzioni di problemi di equilibrio differenti, risultano piuttosto stabili sotto variazioni della topologia

Es: sul modello a blocchi stocastici (una generalizzazione del modello a partizioni piantumate)



$$\nu_1 = \frac{p_{out}}{p_{1,in}}$$

$$\nu_1 = \frac{p_{out}}{p_{2,in}}$$

Conclusioni

- Il Naming Game è un modello agent-based di interesse multi-disciplinare. Esso incrocia domini che spaziano dalla meccanica statistica alla semiotica, dall'intelligenza artificiale alla diffusione del consenso politico, dal data-mining ai sistemi complessi, etc.;
- Abbiamo studiato la struttura di fase del Naming Game su reti community-based;
- La transizione di fase tra stati mono- e multi- linguaggio è teoricamente interessante poiché essa è determinata interamente dalla topologia della rete;
- Abbiamo dimostrato che gli stati multi-linguaggio metastabili di consenso locale (noti precedentemente) divengono perfettamente stabili nel limite termodinamico quando la connettività tra le comunità scende al di sotto di soglie critiche;
- Abbiamo determinato le soglie su diversi tipi di rete community-based allo scopo di stabilire quali caratteristiche topologiche influenzano maggiormente le fasi multi-linguaggio;
- Le soglie sembrano esibire un certo grado di stabilità sotto variazione della topologia.