

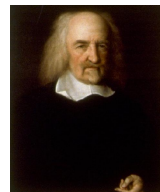
Universalità dei processi di voto da modelli dinamici su reti complesse

Filippo Palombi



23 Maggio 2013 – C.R. Portici

"La Natura (l'arte con la quale Dio ha fatto e governa il mondo) è imitata dall'arte dell'uomo, come in molte altre cose, così anche in questo, nel poter fare un animale artificiale. Infatti, dato che la vita non è altro che un movimento di membra il cui inizio è in qualche principale parte interna, perché non possiamo dire che tutti gli automi (macchine che si muovono da sé mediante molle e ruote, come un orologio) hanno una vita artificiale? Che cos'è infatti il cuore se non una molla e che cosa sono i nervi se non altrettanti fili e che cosa le giunture se non altrettante ruote che danno movimento all'intero corpo, così come fu designato dall'artefice? L'arte va ancora più lontano, imitando quella razionale e più eccellente opera della natura che è l'uomo. Poiché dall'arte viene creato quel gran LEVIATANO chiamato comunità politica o stato (in latino civitas) il quale non è altro che un uomo artificiale, sebbene di statura e forza maggiore di quello naturale, alla cui protezione e difesa fu designato."



Thomas Hobbes, Leviathan (Introduzione, 1651)

Timeline:

- † 1543: Copernico pubblica "De revolutionibus orbium coelestium"
- † 1573: Brahe pubblica "De nova stella"
- † 1600: Bruno è condannato come eretico
- † 1632: Galilei pubblica "Dialogo sui massimi sistemi"
- † 1687: Newton pubblica "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica"

Sistemi elettorali



Il sistema elettorale è costituito dall'insieme delle regole che si adottano in una democrazia rappresentativa per trasformare le preferenze espresse degli elettori durante le elezioni in voti e i voti in seggi da assegnare all'interno del Parlamento o più in generale di un'assemblea legislativa. La formula elettorale può essere:

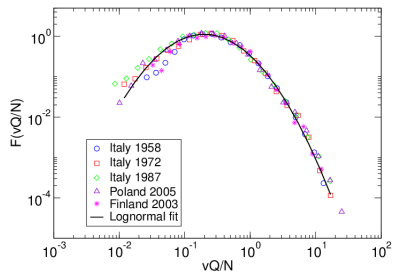
- X **maggioritaria**: la più antica, tende a premiare i candidati o partiti vincitori in collegi uninominali o plurinominali
- X **proporzionale**: elaborata a partire dalla seconda metà dell'Ottocento, tende a stabilire un rapporto proporzionale tra i voti ottenuti da un partito e i seggi ad esso assegnati



Il **sistema elettorale proporzionale**, o di lista, fu introdotto nel corso del Novecento su spinta delle grandi formazioni politiche di massa, quelle centriste popolari, e quelle di sinistra socialiste. Il primo paese ad applicarlo fu il Belgio nel 1900.

Elemento caratterizzante del sistema proporzionale è l'assegnazione dei seggi in circoscrizioni elettorali plurinominali, suddividendoli fra le varie liste in proporzione ai voti ottenuti. Si presenta quindi come un sistema elettorale basato sulla democraticità e rappresentatività in quanto permette di fotografare le divisioni politiche effettive del Paese.

Aspetto positivo, quindi, che salta subito all'occhio è la possibilità di una rappresentanza parlamentare che rifletta in maniera meno distorta possibile la reale situazione politica di un paese, con una significativa tutela delle minoranze. Qualora i partiti siano notevolmente frazionati, però, il proporzionale riflette questo frazionamento reale in parlamento e la formazione di un governo richiede coalizioni che uniscano più partiti, con conseguente forte instabilità (se i partiti non riescono a trovare degli accordi; viceversa può portare anche a sistemi consociativi e di governi di grosse coalizioni che tendono a tenere sotto controllo il conflitto).



Fortunato & Castellano

"Word of mouth and universal voting behaviour in proportional elections"

Phys. Rev. Lett. 99, 138701 (2007). (physics/0612140)

N : numero di voti presi dal partito i^{mo}

Q : numero di candidati presentati dal partito i^{mo} in un singolo collegio plurinomiale

v : numero di voti presi dal candidato j^{mo} del partito i^{mo}

F : densità di probabilità



due proprietà osservabili: scaling e universalità



"Le molecole (in un gas) sono simili a molti individui, i quali si trovano nei più vari stati di moto, e le proprietà dei gas rimangono inalterate soltanto perché il numero di queste molecole, che in media hanno un dato stato di moto, è costante nel tempo."



Ludwig Boltzmann, "Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen" (1872)

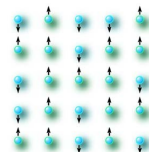
La meccanica statistica ammette tre possibili formulazioni:

- ❄ *ensemble microcanonico*: numero di particelle fissato, energia totale fissata
- ★ *ensemble canonico*: numero di particelle fissato, energia totale fluttuante
- ⚡ *ensemble grancanonico*: numero di particelle fluttuante, energia totale fluttuante

Nell'*ensemble canonico*, il sistema è immerso in un *reservoir* termico alla temperatura T . Gli stati microscopici si distribuiscono secondo la legge universale

$$\mathcal{P}_T(v, r) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{kT} H(v, r)\right\}}{\int dr dv \exp\left\{-\frac{1}{kT} H(r, v)\right\}} \quad H(r, v) = T(v) + V(r)$$

Il prototipo dei modelli agent-based è il **modello di Ising**.



- ◆ gli agenti sono atomi in un reticolo cristallino regolare in $d \geq 1$ dimensioni
- ◆ il reticolo cristallino è immerso in un campo magnetico esterno h
- ◆ l' i^{mo} atomo è caratterizzato da una variabile di spin $\sigma_i = \pm 1$ lungo la direzione del campo esterno
- ◆ la hamiltoniana del sistema è

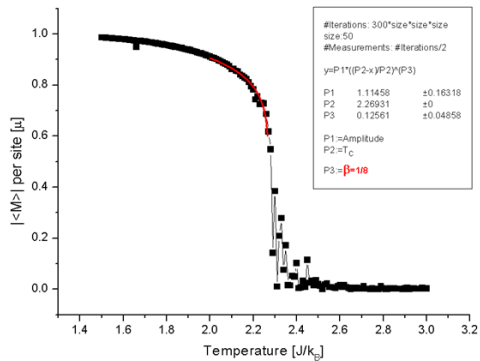
$$H(\sigma) = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

La fisica del modello di Ising:

- ☞ σ_i tende ad allinearsi con h
- ☞ σ_j e σ_j tendono ad allinearsi se $J_{ij} > 0$ (**ferromagnetismo**)
- ☞ σ_j e σ_j tendono ad opporsi se $J_{ij} < 0$ (**anti-ferromagnetismo**)
- ☞ le fluttuazioni termiche (legge di Boltzmann) creano disordine

La matematica del modello di Ising:

- ☞ in $d \geq 2$ il modello esibisce una transizione di fase del secondo tipo a campo esterno nullo (Onsager, 1944)



$$M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i$$



Il modello dei votanti (Clifford & Sudbury – 1973, Holley & Liggett – 1975)



- ❖ modello definito da una rete di agenti rappresentata da un grafo $\mathcal{G} = (V, E)$
- ❖ i^{mo} agente caratterizzato da una variabile $\eta_i \in \{0, 1\}$
(0 = partito democratico, 1 = partito repubblicano)
- ❖ agenti interagiscono attraverso la seguente dinamica microscopica:

- selezionare un agente i con distribuzione piatta
- selezionare un agente $j \in \text{adj}\{i\}$ con distribuzione piatta
- assegnare all'agente i l'opinione dell'agente j : $\eta_i \leftarrow \eta_j$



Il modello, nella sua formulazione originale, implementa il concetto di agente “totalmente passivo”

Distribuzioni di equilibrio del modello dei votanti

Nel caso in cui $\mathcal{G} \subset \mathbb{Z}^d$ è una porzione di reticolo in d dimensioni e $|\mathcal{G}| = N$, è noto che:

- ☀— se $N < +\infty$, il sistema raggiunge sempre il consenso, cioè esistono solo due distribuzioni di equilibrio:

$$\mathcal{P}_0(\eta) = \prod_{i \in \mathcal{G}} \delta_{\eta_i, 0}, \quad \mathcal{P}_1(\eta) = \prod_{i \in \mathcal{G}} \delta_{\eta_i, 1}$$

Il tempo T_N necessario dipende da N e la forma funzionale di T_N dipende da d :

$$T_N \sim N^2, \quad \text{per } d = 1$$

$$T_N \sim N \log(N), \quad \text{per } d = 2$$

$$T_N \sim N, \quad \text{per } d > 2$$

- ☀— se $N = +\infty$, il sistema ammette infinite distribuzioni di equilibrio

Nel caso in cui $\mathcal{G}$ è un grafo, l'equilibrio del modello è complesso e oggetto di ricerca.

Modifiche del modello e applicazioni

Variazioni sugli agenti

- **introduzione di zeloti**: agenti che non cambiano mai opinione (Mobilia, 2003)
- **introduzione di opportunisti**: agenti che assumono opinione media rispetto ai loro vicini (Schneider, 2004)
- **introduzione di contrarians**: agenti che assumono opinione contraria al loro vicino (Galam, 2004)

Variazioni sulla regola d'interazione

- ▣ **introduzione di vincoli**: tre stati, i.e. $\eta_i \in \{0, 1, 2\}$, e agenti "estremisti" non interagenti (Vasquez et al., 2003)
- ▣ **meccanismi di memoria**: agenti cambiano opinione solo dopo n interazioni (Dall'Asta & Castellano, 2007)
- ▣ **processo di invasione**: l'agente selezionato esporta la sua opinione ad un vicino (Castellano, 2005)
- ▣ **processo di contatto**: l'agente selezionato cambia opinione solo se si trova in stato $\eta_i = 0$ (Clifford & Sudbury, 1973)

Applicazioni

- ▣ **Diffusione di epidemie**
- ▣ **Diffusione di virus informatici**
- ▣ **Modelli ecologici (propagazione di incendi)**



Il Modello di Axelrod per la diffusione della cultura (Axelrod, 1997)

- ❖ modello definito da una rete di agenti rappresentata da un grafo $\mathcal{G} = (V, E)$
- ❖ i^{mo} agente caratterizzato da F tratti culturali, cioè da un vettore

$$X_i = \{X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(F)}\}, \quad X_i^{(k)} \in \{1, \dots, q\}$$

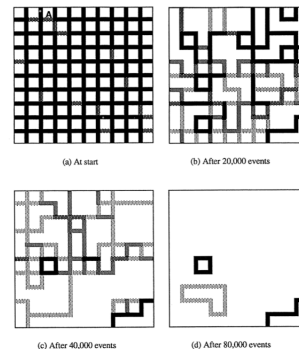
- ❖ agenti interagiscono attraverso la seguente dinamica microscopica:

- selezionare un agente i e un suo vicino j con distribuzione piatta
- i e j interagiscono con probabilità proporzionale al numero di tratti in comune
- se i e j interagiscono, i eredita da j uno dei tratti NON in comune

Il modello, implementa il concetto di omofilia (interazione più probabile tra simili)

Isole di cultura

- simulazione su un reticolo 10×10
- agenti rappresentati da quadrati bianchi
- linee separano agenti che differiscono per almeno un tratto
- linee nere: tutti i tratti diversi; linee bianche: tutti i tratti uguali



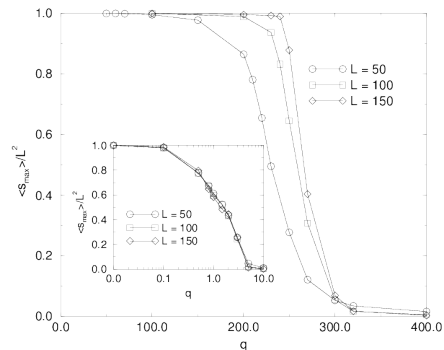
La simulazione termina quando gli agenti non possono più interagire con i vicini (o totalmente uguali o totalmente diversi)

!!! Nel dominio spaziale della cultura dominante, sono presenti domini connessi di sotto-culture !!!

Transizione di fase

Il modello di Axelrod esibisce una transizione di fase
(Castellano, Marsili, Vespignani, 2000)

- Simulazioni su un reticolo 2-dimensionale con $L = 50, 100, 150$
- $F = 10$ ($F = 2$ nell'inserto)
- $s_{\max}$ = area del più grande dominio culturale all'equilibrio



Generatore di Markov

- sia $\eta \in X$ la configurazione iniziale degli agenti (al tempo $t = 0$) ed η_t la configurazione al tempo t .
- sia $C(X)$ lo spazio delle funzioni continue su X
- l'evoluzione temporale del sistema è fornita dall'operatore lineare su $C(X)$

$$S(t)f(\eta) \equiv \mathbb{E}^\eta f(\eta_t)$$

Proprietà (semi-gruppo)

- $S(0) = \mathbb{I}$, l'operatore identità su $C(X)$
- il mapping $t \rightarrow S(t)f$ è continuo a destra, per ogni $f \in C(X)$
- $S(t+s)f = S(t)S(s)f$ per ogni $f \in C(X)$ e per ogni $t, s \geq 0$
- $S(t)1 = 1$ per ogni $t \geq 0$
- $S(t)f \geq 0$ per ogni $f \geq 0$

$$S(t) = \exp\{t\Omega\}, \quad \Omega f(\eta) = \sum_x \sum_{\phi \in \mathcal{W}} c_\eta(x, \phi) [f(\eta_{x, \phi}) - f(\eta)]$$

$c_\eta(x, \phi)$ è la probabilità di transizione per unità di tempo di $\eta \rightarrow \eta_{x, \phi}$, dove $\eta_{x, \phi}(z) = \begin{cases} \phi & \text{se } z = x \\ \eta(z) & \text{altrimenti} \end{cases}$

A partire dalla configurazione η degli agenti, costruiamo variabili collettive. Esempi:

🦋 **modello dei votanti:** $v_0 = |\{i \text{ tale che } \eta_i = 0\}|$, $v_1 = |\{i \text{ tale che } \eta_i = 1\}|$

🦋 **modello di Axelrod:** $u_{kj} = |\{i \text{ tale che } X_i^{(k)} = j\}|$, etc.



La dinamica stocastica su η induce una dinamica stocastica sulle variabili collettive $\underline{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$. **Chi la governa ?**

Descrizione microscopica

- 🦋 $c_\eta(x, \phi)$: transition rate per l'agente x verso lo stato ϕ
- 🦋 $\mathcal{P}(\eta, t)$: densità di probabilità di η al tempo t

Descrizione macroscopica

- 🦋 $w(\underline{v}'|\underline{v})$: transition rate per lo stato $\underline{v}$ verso lo stato $\underline{v}'$
- 🦋 $\mathcal{P}(\underline{v}, t)$: densità di probabilità di $\underline{v}$ al tempo t

$\mathcal{P}(\underline{v}, t)$ soddisfa l'equazione master

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\underline{v}, t)}{\partial t} = \sum_{\underline{v}'} [w(\underline{v}|\underline{v}') \mathcal{P}(\underline{v}', t) - w(\underline{v}'|\underline{v}) \mathcal{P}(\underline{v}, t)]$$

L'equazione master esprime la variazione temporale di $\mathcal{P}$ in termini di flusso di probabilità entrante e uscente

✂ l'equazione master è difficilmente risolvibile: **si devono fare approssimazioni**

✂ l'approssimazione tipica è quella di **grande volume** (o di Karmers-Moyal): eq.ne master → eq.ne di Fokker-Planck

approx. di grande volume (Ω):

■ riscalarle le variabili collettive $\underline{v} \rightarrow \underline{\phi} = \left\{ \frac{v_1}{\Omega}, \dots, \frac{v_n}{\Omega} \right\}$

■ espandere l'eq.ne master in potenze inverse di Ω

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\underline{\phi}, t)}{\partial t} = \underbrace{- \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left[A_i(\underline{\phi}, t) \mathcal{P}(\underline{\phi}', t) \right]}_{\text{drift}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \left[B_{ij}(\underline{\phi}, t) \mathcal{P}(\underline{\phi}', t) \right]}_{\text{diffusione}}$$

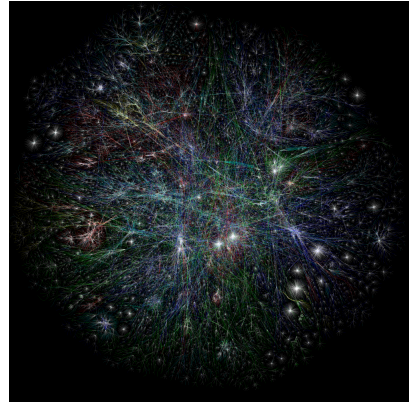
✂ l'equazione master descrive transizioni granulari

✂ l'equazione di Fokker-Planck descrive transizioni continue

✂ le funzioni A_i e B_{ij} sono determinate a partire dalle transition rates w

Esistono vari modelli di rete in letteratura. I più comuni sono:

- modello di Erdős-Rényi o **Binomial Networks**
- modello di Watts-Strogatz o **Small Worlds**
- modello di Barabási & Albert o **Scale Free Networks**

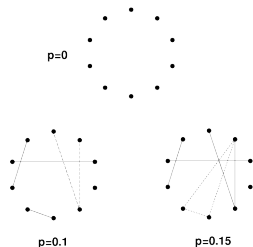


The Whole Internet

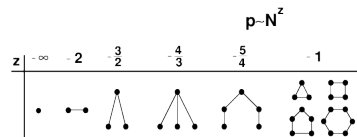
<http://www.opte.org/maps/>

Reti di Erdős-Rényi

- Primo modello di grafi random (Random Graph Theory)
- Si parte da N nodi isolati
- Per ogni coppia di nodi (i, j) si crea un link con probabilità $p \in [0, 1]$
- L'ensemble $\mathcal{G}(N, p)$ esibisce proprietà rilevanti per

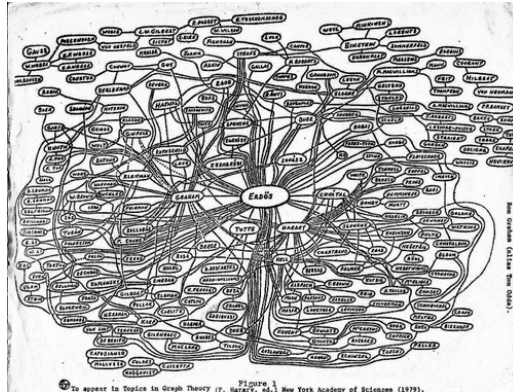


$$N \rightarrow +\infty, \quad p \sim N^z$$



se $G_0 \in \mathcal{G}(N, p)$ e G_0 ha n links

$$P(G_0) = p^n (1-p)^{N(N-1)/2 - n}$$

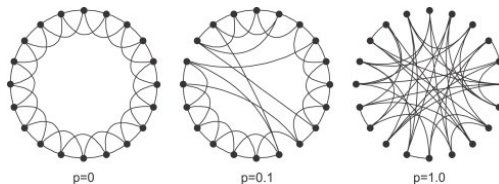


Erdős collaboration graph

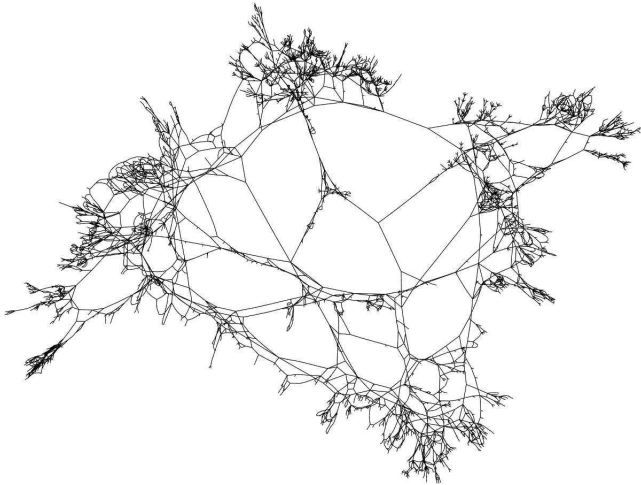
<http://www.oakland.edu/enp/>

Reti di Watts-Strogatz o Small Worlds

- ⚡ Molto usate per i social networks (ma non solo!)
- ⚡ Si parte da N noi isolati con topologia ad anello
- ⚡ Si connette ciascun nodo ai primi $K/2$ a sinistra e a destra
- ⚡ Si ricabla (rewire) ciascuna coppia (i, j) di nodi con probabilità $p \in [0, 1]$



al crescere di p si passa da una rete ordinata ad una rete di Erdős-Rényi



US western states power grid

Watts & Strogatz, Nature, 1998

Modello di Barabási & Albert

† Un approccio basato sull'evoluzione temporale della rete

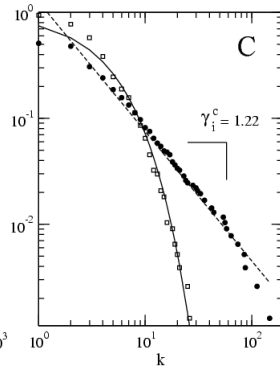
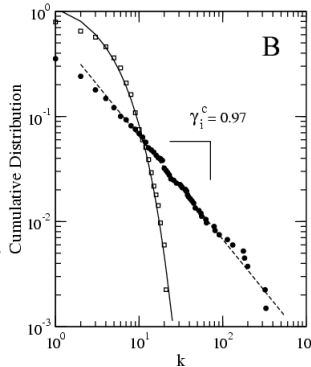
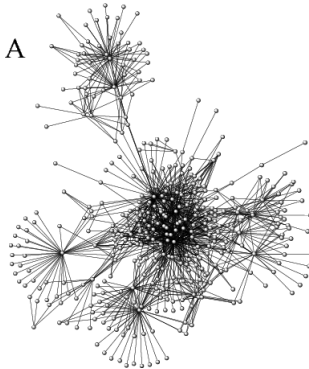
† Due concetti guida: **Growth** e **Preferential attachment**

Evoluzione della rete:

1. Si parte con un piccolo numero di m_0 nodi, tutti connessi
2. ad ogni passo si aggiunge un nodo alla rete, cablandolo ad m nodi esistenti
3. la scelta dei nodi di cablatura è probabilistica:
il nuovo nodo è cablato al nodo i con probabilità

$$P(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

dove k_i è il grado del nodo i . **Rich gets richer!**



Rete di "include.h" della più grande componente connessa di XFree86 al 15.05.1994

"Logarithmic growth dynamics in software networks"

Valverde & Solé, 2005

!!! Punto di vista soggettivo !!!

- fenomeni di universalità:
universalità → invarianza → simmetria → leggi fondamentali
- ruolo delle reti complesse sui modelli agent-based
- **new frontier**: modelli interagenti su reti dinamiche

- "Critical Mass (How One Thing Leads to Another)"

Philip Ball (2004, Arrow Books)

- "Statistical Physics of Social Dynamics"

Castellano, Fortunato & Loreto, *arXiv:0710.3256*

- "Statistical Mechanics of Complex Networks"

Réka Albert, Albert-László Barabasi, *arXiv:*

