

Gravitational wave polarizations in metric $f(R)$ -gravity

Fabio Moretti¹, Flavio Bombacigno¹ e Giovanni Montani^{1,2}

¹Physics Department, Sapienza University of Rome, P.le Aldo Moro 5, 00185
Roma, Italy

²ENEA, Fusion and Nuclear Safety Department, C. R. Frascati, Via E. Fermi
45, 00044 Frascati (Roma), Italy

Gravità modificata: le teorie $f(R)$

Onde gravitazionali

Fenomenologia

Perché modificare la GR?

1. Ottenere teoria rinormalizzabile
2. Correzioni quantistiche implicano azione effettiva a basse energie contenente invarianti di ordine superiore
3. Curare le anomalie in cosmologia e astrofisica: espansione accelerata (dark energy), formazione e stabilità delle strutture e altri effetti dinamici (dark matter)
4. Rimozione problema della singolarità (iniziale e/o buco nero)
5. Escludere modelli alternativi non compatibili porta a conoscere più profondamente la teoria standard

Caso standard

Caso standard

- Azione di Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_M(g_{\mu\nu}, \chi_M) \qquad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

Caso standard

- ▶ Azione di Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_M(g_{\mu\nu}, \chi_M) \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

- ▶ Equazione di campo (variazione rispetto a $g_{\mu\nu}$)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

Caso standard

- ▶ Azione di Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_M(g_{\mu\nu}, \chi_M) \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

- ▶ Equazione di campo (variazione rispetto a $g_{\mu\nu}$)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

- ▶ Traccia

$$-R = \kappa T$$

Relazione algebrica

$f(R)$ metriche

$f(R)$ metriche

► Azione $f(R)$

$$S_f = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M(g_{\mu\nu}, \chi_M)$$

$f(R)$ metriche

- ▶ Azione $f(R)$

$$S_f = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M(g_{\mu\nu}, \chi_M)$$

- ▶ Equazione di campo (IV ordine)

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}$$

$f(R)$ metriche

- ▶ Azione $f(R)$

$$S_f = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M(g_{\mu\nu}, \chi_M)$$

- ▶ Equazione di campo (IV ordine)

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}$$

- ▶ Traccia

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\square f'(R) = \kappa T$$

Relazione differenziale

Equazione di Friedmann modificata

Equazione di Friedmann modificata

- ▶ Assumendo metrica FLRW e $T_{\mu\nu} = 0$

Equazione di Friedmann modificata

- Assumendo metrica FLRW e $T_{\mu\nu} = 0$

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho_{eff} \qquad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}[\rho_{eff} + 3P_{eff}]$$

Equazione di Friedmann modificata

- Assumendo metrica FLRW e $T_{\mu\nu} = 0$

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho_{eff} \qquad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}[\rho_{eff} + 3P_{eff}]$$

$$\rho_{eff} = \frac{Rf' - f}{2f'} - \frac{3H\dot{R}f''}{f'}$$

$$P_{eff} = \frac{\dot{R}^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{1}{2}(f - Rf')}{f'}$$

Equazione di Friedmann modificata

- Assumendo metrica FLRW e $T_{\mu\nu} = 0$

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho_{eff} \qquad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6} [\rho_{eff} + 3P_{eff}]$$

$$\rho_{eff} = \frac{Rf' - f}{2f'} - \frac{3H\dot{R}f''}{f'}$$

$$P_{eff} = \frac{\dot{R}^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{1}{2}(f - Rf')}{f'}$$

$$w_{eff} \equiv \frac{P_{eff}}{\rho_{eff}} = -1 \qquad \implies \qquad \frac{f'''}{f''} = \frac{\dot{R}H - \ddot{R}}{(\dot{R})^2}$$

Limite Newtoniano modificato

Limite Newtoniano modificato

- Campo debole + derivate temporali trascurabili + analiticità di $f(R)$ in $R = 0$

$$f(R) = R + \alpha R^2 + \beta R^3 + \dots$$

Limite Newtoniano modificato

- Campo debole + derivate temporali trascurabili + analiticità di $f(R)$ in $R = 0$

$$f(R) = R + \alpha R^2 + \beta R^3 + \dots$$

- Potenziale Newtoniano ϕ (simmetria sferica)

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{C e^{-mr}}{r} \qquad m = (6\alpha)^{-\frac{1}{2}}$$

Formulazione scalar-tensor

Formulazione scalar-tensor

- Definizione campo scalare e invertibilità

$$\xi \equiv f'(R) \qquad f''(R) \neq 0 \Rightarrow R = R(\xi)$$

Formulazione scalar-tensor

- Definizione campo scalare e invertibilità

$$\xi \equiv f'(R) \qquad f''(R) \neq 0 \Rightarrow R = R(\xi)$$

- Azione scalar-tensoriale

$$S_\xi = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (\xi R - V(\xi)) + S_M$$
$$V(\xi) \equiv \xi R(\xi) - f(R(\xi))$$

► Equazione di campo (II ordine)

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{\xi} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \xi + \frac{1}{2\xi} g_{\mu\nu} V(\xi) = \frac{\kappa}{\xi} T_{\mu\nu}$$

- Equazione di campo (II ordine)

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{\xi} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \xi + \frac{1}{2\xi} g_{\mu\nu} V(\xi) = \frac{\kappa}{\xi} T_{\mu\nu}$$

- Variazione rispetto a ξ

$$R = V'(\xi)$$

- Equazione di campo (II ordine)

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{\xi} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \xi + \frac{1}{2\xi} g_{\mu\nu} V(\xi) = \frac{\kappa}{\xi} T_{\mu\nu}$$

- Variazione rispetto a ξ

$$R = V'(\xi)$$

- Traccia

$$3\square\xi + 2V(\xi) - \xi V'(\xi) = \kappa T$$

Risultati generali

1. Per evitare instabilità temporale $f''(R) > 0$ [**Dolgov, Kawasaki 2003**]
2. Modello $f(R) = R + \alpha R^2$: inflazione [**Starobinski 1979**]
3. Test sul sistema solare indicano $\alpha \leq 10^{-9} m^2$ [**Berry, Gair 2011**]
4. Modello $f(R) = R^{1+\delta}$ può riprodurre curve di velocità delle galassie [**Böhmer, Harko, Lobo 2008**]
5. Necessario chameleon mechanism per riprodurre dark energy e superare weak field test [**Khoury, Weltman 2004**]

Teoria linearizzata

Teoria linearizzata

- Piccola deviazione da Minkowski

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

Teoria linearizzata

- Piccola deviazione da Minkowski

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

- Espansione di Taylor per $f(R)$ vicino a $R = 0$ (Minkowski)

$$f(R) \simeq R + \alpha R^2 + \mathcal{O}(R^3)$$

Teoria linearizzata

- Piccola deviazione da Minkowski

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

- Espansione di Taylor per $f(R)$ vicino a $R = 0$ (Minkowski)

$$f(R) \simeq R + \alpha R^2 + \mathcal{O}(R^3)$$

- Equazione di campo

$$R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} - 2\alpha(\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\square)R^{(1)} = \kappa T_{\mu\nu}$$

Teoria linearizzata

- ▶ Piccola deviazione da Minkowski

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

- ▶ Espansione di Taylor per $f(R)$ vicino a $R = 0$ (Minkowski)

$$f(R) \simeq R + \alpha R^2 + \mathcal{O}(R^3)$$

- ▶ Equazione di campo

$$R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} - 2\alpha(\partial_\mu\partial_\nu - \eta_{\mu\nu}\square)R^{(1)} = \kappa T_{\mu\nu}$$

- ▶ Traccia

$$(\square - m^2)R^{(1)} = m^2\kappa T \quad m^2 \equiv \frac{1}{6\alpha}$$

► Decomposizione $h_{\mu\nu}$

$$h_{00} = 2\phi$$

$$h_{0i} = \beta_i + \partial_i \gamma$$

$$h_{ij} = h_{ij}^{TT} + \frac{1}{3}H\delta_{ij} + \partial_{(i}\epsilon_{j)} + \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Delta\right)\lambda$$

► Decomposizione $h_{\mu\nu}$

$$h_{00} = 2\phi$$

$$h_{0i} = \beta_i + \partial_i \gamma$$

$$h_{ij} = h_{ij}^{TT} + \frac{1}{3}H\delta_{ij} + \partial_{(i}\epsilon_{j)} + \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Delta\right)\lambda$$

► Vincoli

$$\partial^i \beta_i = 0$$

$$\partial^i h_{ij}^{TT} = 0$$

$$\eta^{ij} h_{ij}^{TT} = 0$$

$$\partial^i \epsilon_i = 0$$

► Decomposizione $h_{\mu\nu}$

$$h_{00} = 2\phi$$

$$h_{0i} = \beta_i + \partial_i \gamma$$

$$h_{ij} = h_{ij}^{TT} + \frac{1}{3}H\delta_{ij} + \partial_{(i}\epsilon_{j)} + \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Delta\right)\lambda$$

► Vincoli

$$\partial^i \beta_i = 0$$

$$\partial^i h_{ij}^{TT} = 0$$

$$\eta^{ij} h_{ij}^{TT} = 0$$

$$\partial^i \epsilon_i = 0$$

► Combinazioni gauge invarianti

$$\Phi = -\phi + \dot{\gamma} - \frac{1}{2}\ddot{\lambda}$$

$$\Theta = \frac{1}{3}(H - \Delta\lambda)$$

$$\Xi_i = \beta_i - \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_i$$

► Decomposizione $T_{\mu\nu}$

$$T_{00} = \rho,$$

$$T_{0i} = S_i + \partial_i S,$$

$$T_{ij} = \sigma_{ij} + P\delta_{ij} + \partial_{(i}\sigma_{j)} + \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Delta\right)\sigma,$$

► Decomposizione $T_{\mu\nu}$

$$T_{00} = \rho,$$

$$T_{0i} = S_i + \partial_i S,$$

$$T_{ij} = \sigma_{ij} + P\delta_{ij} + \partial_{(i}\sigma_{j)} + \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Delta\right)\sigma,$$

► Vincoli

$$\partial_i S^i = 0$$

$$\partial^i \sigma_{ij} = 0$$

$$\eta^{ij} \sigma_{ij} = 0$$

$$\partial_i \sigma^i = 0$$

► Decomposizione $T_{\mu\nu}$

$$T_{00} = \rho,$$

$$T_{0i} = S_i + \partial_i S,$$

$$T_{ij} = \sigma_{ij} + P\delta_{ij} + \partial_{(i}\sigma_{j)} + \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Delta\right)\sigma,$$

► Vincoli

$$\partial_i S^i = 0$$

$$\partial^i \sigma_{ij} = 0$$

$$\eta^{ij} \sigma_{ij} = 0$$

$$\partial_i \sigma^i = 0$$

► Conservazione ($\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$)

$$\Delta S = \dot{\rho}$$

$$\Delta \sigma = 3/2 (\dot{S} - P)$$

$$\Delta \sigma_i = 2\dot{S}_i$$

► Caso standard

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Theta = -\kappa \rho \\ \Delta \Phi = \kappa/2 \left(\rho + 3P - 3\dot{S} \right) \\ \Delta \Xi_i = -2\kappa S_i \\ \square h_{ij}^{TT} = -2\kappa \sigma_{ij} \end{array} \right.$$

► Caso standard

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Theta = -\kappa \rho \\ \Delta \Phi = \kappa/2 \left(\rho + 3P - 3\dot{S} \right) \\ \Delta \Xi_i = -2\kappa S_i \\ \square h_{ij}^{TT} = -2\kappa \sigma_{ij} \end{array} \right.$$

► Θ , Φ e Ξ_i gradi statici: gauge

► Caso standard

$$\begin{cases} \Delta \Theta = -\kappa \rho \\ \Delta \Phi = \kappa/2 \left(\rho + 3P - 3\dot{S} \right) \\ \Delta \Xi_i = -2\kappa S_i \\ \square h_{ij}^{TT} = -2\kappa \sigma_{ij} \end{cases}$$

- Θ , Φ e Ξ_i gradi statici: gauge
- h_{ij}^{TT} risolve un'equazione d'onda: polarizzazioni fisiche

Caso $f(R)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Phi - \frac{3}{2}\ddot{\Theta} + \frac{1}{6}R^{(1)} - 2\alpha\ddot{R}^{(1)} = \kappa \left(P + \frac{2}{3}\rho \right) \\ \dot{\Theta} + 2\alpha\dot{R}^{(1)} = -\kappa S \\ \Delta \Xi_i = -2\kappa S_i \\ \square h_{ij}^{TT} = -2\kappa \sigma_{ij} \\ \dot{\Xi}_i = -\kappa \sigma_i \\ \Phi + \frac{1}{2}\Theta + 2\alpha R^{(1)} = -\kappa \sigma \\ \square \Theta + \frac{1}{3}R^{(1)} = \frac{2}{3}\kappa (\Delta \sigma - \rho) \end{array} \right.$$

► Definendo

$$\Phi_R = \Phi + \alpha R^{(1)}$$

$$\Theta_R = \Theta + 2\alpha R^{(1)}$$

► Definendo

$$\Phi_R = \Phi + \alpha R^{(1)} \qquad \Theta_R = \Theta + 2\alpha R^{(1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Phi_R = \frac{1}{2}\kappa \left(3P + \rho - 3\dot{S} \right) \\ \Delta \Theta_R = -\kappa \rho \\ \Delta \Xi_i = -2\kappa S_i \\ \square h_{ij}^{TT} = -2\kappa \sigma_{ij} \end{array} \right.$$

► Definendo

$$\Phi_R = \Phi + \alpha R^{(1)} \qquad \Theta_R = \Theta + 2\alpha R^{(1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Phi_R = \frac{1}{2}\kappa \left(3P + \rho - 3\dot{S} \right) \\ \Delta \Theta_R = -\kappa \rho \\ \Delta \Xi_i = -2\kappa S_i \\ \square h_{ij}^{TT} = -2\kappa \sigma_{ij} \end{array} \right.$$

► Θ_R , Φ_R e Ξ_i gradi statici

► Definendo

$$\Phi_R = \Phi + \alpha R^{(1)} \qquad \Theta_R = \Theta + 2\alpha R^{(1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Phi_R = \frac{1}{2}\kappa \left(3P + \rho - 3\dot{S} \right) \\ \Delta \Theta_R = -\kappa \rho \\ \Delta \Xi_i = -2\kappa S_i \\ \square h_{ij}^{TT} = -2\kappa \sigma_{ij} \end{array} \right.$$

- Θ_R , Φ_R e Ξ_i gradi statici
- h_{ij}^{TT} e $R^{(1)}$ risolvono equazioni d'onda

Deviazione geodetica

Deviazione geodetica

► Caso standard

$$R_{i0j0} = -\frac{1}{2}\ddot{h}_{ij}^{TT} + \partial_{(i}\dot{\Xi}_{j)} + \partial_i\partial_j\Phi - \frac{1}{2}\delta_{ij}\ddot{\Theta}$$

$$\ddot{\delta}_{x_i} \simeq -R_{i0j0} x_0^j$$

Deviazione geodetica

► Caso standard

$$R_{i0j0} = -\frac{1}{2}\ddot{h}_{ij}^{TT} + \partial_{(i}\dot{\Xi}_{j)} + \partial_i\partial_j\Phi - \frac{1}{2}\delta_{ij}\ddot{\Theta}$$

$$\ddot{\delta}_{x_i} \simeq -R_{i0j0} x_0^j$$

$$\begin{cases} \ddot{\delta}_x \simeq -\frac{k^2}{2} h_{11} x_0 \\ \ddot{\delta}_y \simeq \frac{k^2}{2} h_{11} y_0 \\ \ddot{\delta}_z = 0 \end{cases}$$

$$h_{11} \equiv h_+$$

Deviazione geodetica

► Caso standard

$$R_{i0j0} = -\frac{1}{2}\ddot{h}_{ij}^{TT} + \partial_{(i}\dot{\Xi}_{j)} + \partial_i\partial_j\Phi - \frac{1}{2}\delta_{ij}\ddot{\Theta}$$

$$\ddot{\delta}_{x_i} \simeq -R_{i0j0} x_0^j$$

$$\begin{cases} \ddot{\delta}_x \simeq -\frac{k^2}{2} h_{11} x_0 \\ \ddot{\delta}_y \simeq \frac{k^2}{2} h_{11} y_0 \\ \ddot{\delta}_z = 0 \end{cases}$$

$$h_{11} \equiv h_+$$

$$\begin{cases} \ddot{\delta}_x \simeq \frac{k^2}{2} h_{12} y_0 \\ \ddot{\delta}_y \simeq \frac{k^2}{2} h_{12} x_0 \\ \ddot{\delta}_z = 0 \end{cases}$$

$$h_{12} \equiv h_\times$$

► Deviazione geodetica $f(R)$

$$\Phi = \Phi_R - \alpha R^{(1)}$$

$$\Theta = \Theta_R - 2\alpha R^{(1)}$$

► Deviazione geodetica $f(R)$

$$\Phi = \Phi_R - \alpha R^{(1)} \qquad \Theta = \Theta_R - 2\alpha R^{(1)}$$

$$R_{i0j0} = \overbrace{\partial_{(i} \dot{\Xi}_{j)} + \partial_i \partial_j \Phi_R - \frac{1}{2} \delta_{ij} \ddot{\Theta}_R}^{\text{Parte statica}} + \underbrace{\frac{1}{6m^2} \left(\delta_{ij} \ddot{R}^{(1)} - \partial_i \partial_j R^{(1)} \right) - \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}^{TT}}_{\text{Parte radiativa}}$$

Qual è l'effetto di $R^{(1)}$?

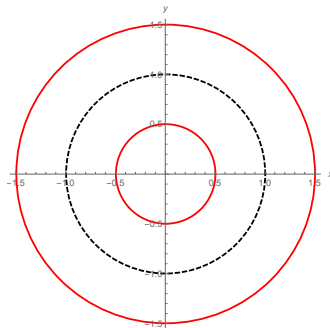
Qual è l'effetto di $R^{(1)}$?

$$\begin{cases} \ddot{\delta}_x \simeq \frac{R^{(1)}}{6} \left(1 + \frac{k^2}{m^2} \right) x_0 \\ \ddot{\delta}_y \simeq \frac{R^{(1)}}{6} \left(1 + \frac{k^2}{m^2} \right) y_0 \\ \ddot{\delta}_z \simeq \frac{R^{(1)}}{6} z_0 \end{cases}$$

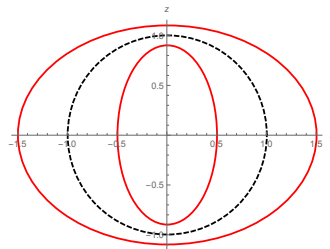
Qual è l'effetto di $R^{(1)}$?

$$\begin{cases} \ddot{\delta}_x \simeq \frac{R^{(1)}}{6} \left(1 + \frac{k^2}{m^2} \right) x_0 \\ \ddot{\delta}_y \simeq \frac{R^{(1)}}{6} \left(1 + \frac{k^2}{m^2} \right) y_0 \\ \ddot{\delta}_z \simeq \frac{R^{(1)}}{6} z_0 \end{cases}$$

Breathing nel piano trasverso + polarizzazione longitudinale



Breathing



Longitudinale

Conclusioni e sviluppi

1. Le onde gravitazionali in teorie $f(R)$ sono caratterizzabili tramite tre gradi di libertà, due tensoriali standard + uno massivo
2. Il g.d.l. aggiuntivo si manifesta come la sovrapposizione di due polarizzazioni distinte, breathing + longitudinale
3. Possibilità di Landau damping per il grado massivo?

Grazie per l'attenzione!

F.Moretti, F.Bombacigno, G.Montani
“Gauge invariant formulation of gravitational waves in
metric $f(R)$ gravity”
arXiv:1906.01899 [gr-qc]